Sommes itérées sur le mot de Thue-Morse et quelques suites S-adiques

Vincent Delecroix and Jean-François Bertazzon,

June 2014

Un mot fini ou infini w est sur un alphabet $\mathcal{A}$ est dit C-équilibré s'il existe une constante C telle que pour tout facteur u et v de w de même longueur et pour toute lettre α de l'alphabet on a

$$||u|_\alpha - |v|_\alpha|| \leq C.$$

Certains points fixes de morphismes sont équilibrés, c'est le cas du mot de Fibonacci (1-équilibré) et de Thue-Morse (2-équilibré). La caractérisation des morphismes primitifs dont les mots du langage associé sont équilibrés est donnée dans [1].

On peut donner un point de vue plus dynamique à cette définition. Soit w un mot infini sur un alphabet $\mathcal{A}$. S'il existe un vecteur $f \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{A}}$ avec $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha = 1$ (*vecteur de fréquences*) et une constante C' telles que pour tout facteur u de w on ait

$$||u|_\alpha - |u| f_\alpha| \leq C'$$

alors w est $2C'$-équilibré. Le terme de gauche dans l'inégalité ci-dessus est un cas particulier de somme de Birkhoff. En effet, soit $\phi_\alpha : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ définie par $f(\beta) = -f_\alpha$ si $\beta \neq \alpha$ et $f(\alpha) = 1 - f_\alpha$. Alors

$$S_n(f_\alpha, w) := \sum_{i=0}^{n-1} f_\alpha(u_i) = |u|_\alpha - |u| f_\alpha.$$

Ainsi, un mot est équilibré (pour une certaine constante C) si et seulement si les sommes de Birkhoff $(S_n(f_\alpha, w))_n$ sont bornées pour toute lettre α. On peut voir le graphique de $n \mapsto S_n(f_\alpha, w)$ pour le mot de Thue-Morse dans le premier dessin de la figure 1.

On peut itérer la construction de sommes de Birkhoff en définissant

$$S_n^{(1)}(f, w) = S_n(f, w) \qquad \text{et} \qquad S_n^{(k+1)}(f, w) = \sum_{i=0}^{n-i} S_n^{(k)}(f, w).$$

Cette construction s'apparente à un triangle de Pascal dans lequel la colonne de gauche est remplacée par la séquence $(\phi_\alpha(w_i))_i$. On remarque alors que pour le mot de Fibonacci $S_n^{(2)}$ n'est pas bornée tandis qu'elle l'est le mot de Thue-Morse ! Pour ce dernier, on peut alors construire une limite lorsque k tend vers l'infini des suite $(S_n^{(k)}(f_\alpha, w))_n$. Voir les figure 1 et 2.

Nous verrons pour quelles classes de points fixes et certains systèmes S-adiques ces sommes de Birkhoff itérées convergent lorsqu'elle sont proprement renormalisées.

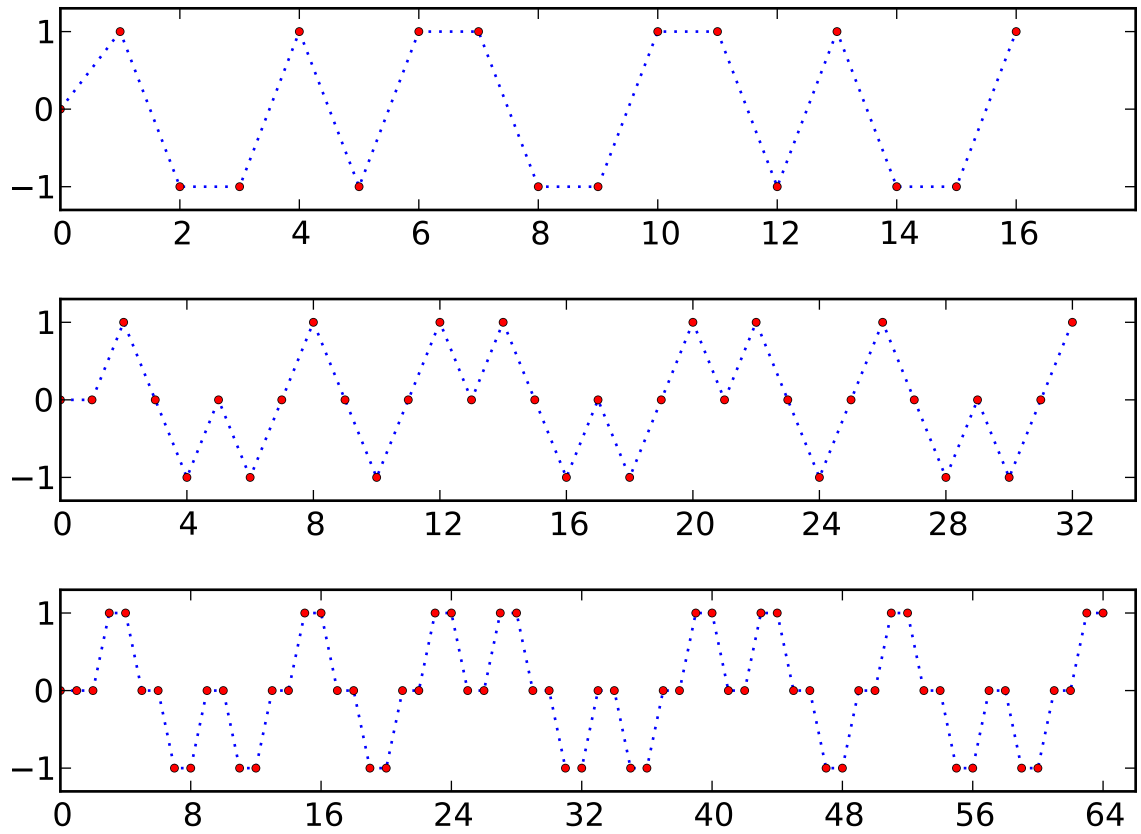

FIGURE 1 – Les sommes de Birkhoff itérées $(S_n^{(k)}(f_\alpha, w))_n$ pour Thue-Morse avec $k = 1, 2, 3$.

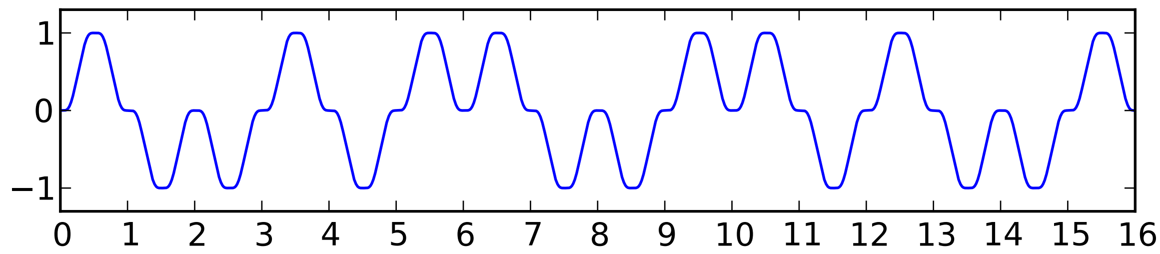

FIGURE 2 – Fonction limite pour le mot de Thue-Morse.

Références

[1] Adamczewski, B. *Symbolic discrepancy and self-similar dynamics*, Ann. Inst. Fourier **54** (2004), 2201–2234.

[2] Berthé, V. et Delecroix, V. *Beyond substitutive dynamical systems : S-adic expansions*, à paraître dans RIMS Lecture note 'Kokyuroku Bessatu'.

[3] Durand F., Leroy J. et Richomme G. *Do the properties of an S-adic representation determine factor complexity ?*, J. of Integer sequences **16** (2013)

[4] Bertazzon, J.-F. *Resolution of an integral equation with the Thue-Morse sequence*, Indagationes Mathematicae, **23** (2012) 4, 327–336.

[5] Bertazzon, J.-F. and Delecroix, V. *Étude d'une équation intégrale avec des méthodes combinatoires.* preprint, arXiv :1403.2235.